ЛА - Каспарян 29.10.12

Умножение на Детерминанти

Т

Ако A и B са квадратни матрици с един и същи размер т.е. $A, B \in M_{n\times n}(F)$ то $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Разглеждаме $C_1 = \begin{pmatrix} A & O_{n\times n} \\ -E_n & B \end{pmatrix}$ ($b_{1j} \dots b_{nj}$) за $\forall\ 1 \le j$ умножаваме j-вите и стълба на C_1 с елементите в $b_{1j} \dots b_{nj}$ на j-ти стълб на B и прибавяме към ($n+j$) стълб на C_1 и получаваме

$$C_2 = \begin{pmatrix} A & AB^{n+j} \\ -E_n & O_{n\times n} \end{pmatrix}$$

детерминантата на C_1 е равна на C_2

$$\det(C_1) = \det(C_2)$$

Разменяме i-ти ред на C_2 с $(n+i)$-ти ред за $\forall\ 1 \le i \le n$ и получаваме

$$C_3 = \begin{pmatrix} -E_n & O_{n\times n} \\ A & AB \end{pmatrix}$$ където

$$\det(C_3) = (-1)^n \det(C_2)$$

От лемата $\Rightarrow$ $\det(C_1) = \det(A)\det(B)$

$$\det(C_3) = \det(-E_n)\det(AB)$$
$$\det(C_3) = (-1)^n \det(AB)$$

В резултат $C_3 = (-1)^n \det(C_2) = (-1)^n \det(C_1)$ дава

$$(-1)^n \det(AB) = (-1)^n \det(A)\det(B) \Rightarrow \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Обратимост и неособеност на матрици
Формули на Крамер

Деф.
Матрицата $A \in M_{n\times n}(F)$ е неособена ако $\det(A) \neq 0$

Деф
Матрицата $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима ако съществува матрица $A' \in M_{n\times n}(F)$ т.ее $AA' = A'A = E_n$ (E_n - единична матр)

Забележка
Ако A е обратима то матрицата A' с $AA' = A'A = E_n$ е единствена. Нарича се обратна матрица на A и се бележи с A^{-1}
Наистина ако A'' е такава че $AA'' = A''A = E_n$ то
$A'' = E_n A'' = (A'A)A'' = A'(AA'') = A'E_n = A'$

Свойства на обратимите матрици

1) Ако A е обратима то A^{-1} е обратима и $(A^{-1})^{-1} = A$
Наистина от $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$ и $(A^{-1})(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}(A^{-1}) = E_n \Rightarrow$
$A = (A^{-1})^{-1}$ съгласно единствеността на обратната матрица A^{-1}

2) Ако A и $B \in M_{n\times n}(F)$ са обратими то AB е обратима матрица и нейната обратна е $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$

Док
От $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n$ и обратното с BB^{-1}
$B^{-1}A^{-1}$ е обратната матрица на AB

Т6

Матрицата $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима $\Leftrightarrow$ е неособеена

Док $\Rightarrow$
Ако съществува $A^{-1} \in M_{n\times n}(F)$, т.че $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$ то
съгласно Т за умножение на детерминанти имаме

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(E_n) = 1$$

$$\Rightarrow \det(A) \neq 0$$

Доказателство ⇐

За произволна матрица $A \in M_{n\times n}(F)$, да означим с

$A^* = \begin{matrix} & J \\ i & \begin{pmatrix} & \\ A_{Ji} & \end{pmatrix} \end{matrix} \in M_{n\times n}(F)$, която в i-ти ред и J-ти стълб

съдържа адюнгираното количество A_{Ji} на елемента a_{Ji} на A

$$A_{Ji} = (-1)^{J+i} \det \begin{matrix} & & J & \\ i & \left| \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right. \end{matrix} \quad \text{(премахване)} \quad \text{тогава}$$

$$AA^* = \begin{matrix} & & J & \\ i & \left(a_{i1} \cdots a_{in} \right) & \left(\begin{matrix} \\ A_{J1} \\ A_{J2} \\ \\ A_{Jn} \end{matrix} \right. \end{matrix} \quad \text{защото} \sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{Js} = \delta_{iJ} \det(A)$$

$$= \begin{matrix} & J \\ i & \begin{pmatrix} & \\ \delta_{iJ}\det(A) & \end{pmatrix} \end{matrix} = \det(A) \begin{matrix} & J \\ i & \begin{pmatrix} & \\ \delta_{iJ} & \end{pmatrix} \end{matrix} = \det(A) E_n$$

Аналогично

$$A^*A = \begin{matrix} & & J & \\ i & \left(A_{1i} \cdots A_{ni} \right) & \left(\begin{matrix} \\ a_{1J} \\ \vdots \\ a_{nJ} \end{matrix} \right. \end{matrix} = \sum_{S=1}^{n} a_{SJ} A_{Si} = \delta_{iJ} \det(A) \Rightarrow$$

$$= \det(A) E_n$$

Ако $\det(A) \neq 0$ то $\Rightarrow$ че $\frac{1}{\det(A)} \cdot A^*$ е обратната матрица на A

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} \cdot A^* \right) = \frac{1}{\det(A)} (AA^*) = \frac{1}{\det(A)} \det(A) E_n = E_n$$

Следствие

Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ е обратима и $AB = E_n$ за $B \in M_{n\times n}(F)$ то

$B = A^{-1}$ т.е. от $AB = E_n \Rightarrow BA = E_n$

$AB = E_n \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ и от

$E_n B = B = (AA^{-1})B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E_n = A^{-1}$

единственост на обратната матрица

пример:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Но $A_{11} = (-1)^{1+1} d = d$, $A_{21} = (-1)^{1+2} c = -c$

$A_{21} = (-1)^{2+1} b = -b$, $A_{22} = (-1)^{2+2} a = a$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Т6

Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ е неособена матрица, то съществуват елементарни преобразувания по редове, които свеждат A към E_n (единичната матрица)

Доказателство

Ако $\det(A) \neq 0$ то $\exists a_{i1} \neq 0$ за някое $1 \leq i \leq n$

т.е. $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ след разместване на редовете имаме $a_{11} \neq 0$. Умножението на I-ви ред с a_{11}^{-1} дава $a_{11} = 1$, (за $1 \leq i \leq n$)

Умножаваме I-ви ред с $(-a_{i1})$ и прибавяме към i-тия ред за $i = 2, \dots, n$ получаваме

$a_{21} = a_{31} = \dots = a_{n1} = 0$ т.е. $\left(\begin{array}{c|c} 1 & a_{12} \dots a_{1n} \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{array}\right)$

Продължаваме по същият начин с матрицата получена от A чрез прехвърляне на I-ви ред и I-ви стълб

По този начин постигаме следното нещо: $A = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(при елементарни преобразувания по редове)

$A \mapsto PA$ за подходяща матрица $P \in M_{n\times n}(F)$, обратното елементарно преобразуване $PA \mapsto A$ е ляво умножение с $Q \in M_{n\times n}(F)$ - Следователно $QPA = A = E_n A \Rightarrow$

$$(QP - E_n)A = 0_{n\times n}$$

Матрицата A е обратима т.е.

$QP - E_n = (QP - E_n)E_n = (QP - E_n)AA^{-1} = O_{n\times n}A^{-1} = O_{n\times n}$

следователно $QP = E_n$ откъдето $\det(P) \neq 0$ и $\det Q \neq 0$ и $\det(PA) \neq 0$. С други думи елементарните преобразувания по редове променят $\det(A)$, но винаги я умножават с $\det(P) \neq 0$

Доказателство

Умножаваме n-ти ред с $(-a_{in})$ и прибавяме към i-ти ред за $1 \leq i \leq n-1$. Това дава

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & * & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \quad n$$

Продължаваме с почистване на $(n-1)$-ви стълб на $(n-1)$-ви ред. Това не променя нулите в n-ти стълб защото 1-вите $n-1$ реда на n-ти стълб са нулеви. Това дава $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичната матрица (E_n)

Ако решаваме матрично уравнение $AX = B$ с обратима, т.е. $A \in M_{n\times n}(F)$, $B \in M_{n\times m}$ то $X \in M_{n\times m}(F)$

$$(A\,|\,B) \xrightarrow[\text{по редове}]{\text{елем. преобр}} (E_n\,|\,C)$$

Елементарните преобразувания по редове са леви умножения с необратими $P_1 \ldots P_k$, така че

$$P_k \ldots P_2 P_1 A = E_n. \text{ Оттук } A^{-1} = P_k \ldots P_2 P_1$$

$$C = P_k \ldots P_2 P_1 B = A^{-1}B$$

$$(E_n\,|\,C) = (E_n\,|\,A^{-1}B) \Rightarrow X = A^{-1}B = C$$

Ако решаваме $\exists A = B$ с $A \in M_{n\times n}$, $\det(A) \neq 0$, $B \in M_{n\times n}(F)$ то $\exists \in M_{n\times n}(F)$ т.е.

$$\left(\frac{A}{B}\right) \xrightarrow{\text{елементарни преобр}} \left(\frac{E_n}{AA^{-1} = \exists}\right)$$

$A \longmapsto E_n = AQ_1Q_2 \cdots Q_e \Rightarrow Q_1 \cdots Q_e = A^{-1}$

$B \longmapsto BQ_1Q_2 \cdots Q_e = BA^{-1}$

$A^t \cdot _^t = B^t$

$(A^t | B^t) \xrightarrow[\text{по редове}]{\text{ел. преб.}} (E_n | (A^t)^{-1} B^t = (BA^{-1})^t)$

За намиране на A^{-1} при $\det(A) \neq 0$ решаваме матричното уравнение $AX = E_n$

Тв. - Формули на Крамер

Ако $Ax = b$ е система матрични уравнения с неособена матрица от коефициенти $A \in M_{n \times n}(F)$ то тази система има единствено решение $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta} \cdots \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$ където $\Delta = \det(A)$ а Δ_j е детерминанта на матрицата получена от A чрез замяна на на j-тия стълб на A със стълба $b \in M_{n \times 1}(F)$ на свободните членове. Матричното уравнение $Ax = b$ с обратима матрица A има единствено решение $x = A^{-1}b$

$(A|b) \xrightarrow[\text{само по редове}]{\text{ел преб}} (E_n | A^{-1}b)$. Нека $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(F)$ е единственото решение на $Ax = b$. Умножаваме отново $Ac = b$ с едноименната матрица $A^* = i\begin{pmatrix} j \\ A_{ji} \end{pmatrix}$ и получаваме

$$\Delta C = \det(A) E_n C = (A^* A) C = A^*(Ac) = A^* b = i\begin{pmatrix} A_{1i} \cdots A_{ni} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$i\left(\sum_{s=1}^{n} b_s A_{si}\right) \quad \text{Но } \Delta_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^{n} b_s A_{si} = \Delta_i$$

$\det(A) = \det\begin{pmatrix} & \overset{i}{\downarrow} & \\ a_{1i} & & \\ a_{2i} & & \\ \vdots & & \\ a_{ni} & & \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$: Δ за $Ax = B$

Линейни пространства и подпространства

Линейна обвивка

Деф

Непразното множество V е линейно пространство над поле F, ако във V са определени събиране на вектори

$V \times V \to V, (u,v) \mapsto u+v$ и умножение на вектор със скалар $F \times V \to V (\lambda, u) \mapsto \lambda u$

изпълняващи следните свойства

1) комутативност на събирането $u+v = v+u$ за $\forall u, v \in V$
2) асоциативност на събирането $(u+v)+w = u+(v+w)$ за $\forall u, v, w \in V$
3) $\exists \vec{0}$, т.че $\vec{0}+u = u$ за $\forall u \in V$
4) $\forall u \in V$ има противоположен $-u \in V$, т.че $u+(-u) = \vec{0}$
5) Дистрибутивен закон над скаларен множител
$(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$ за $\forall \lambda, \mu \in F$ и $\forall u \in V$
6) Дистрибутивен закон над векторен множител
$\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$ за $\forall \lambda \in F$, $\forall u, v \in V$
7) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$ за $\forall \lambda, \mu \in F$, $\forall u \in V$
8) за $1 \in F$, $\forall u \in V$ имаме $1.u = u$

Примери за линейни пространства

1) Пространството на векторите в равнината R^2 (или в пространството R^3) в началото на координатната система
2) Ако F е поле, $n \in N$ то $F^n = \{x = (x_1 \dots x_n) \mid x_i \in F, 1 \le i \le n\}$

образуват линейно пространство над F относно операциите
$(x_1 \dots x_n) + (y_1 \dots y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots x_n+y_n)$ и
$\lambda(x_1 \dots x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2 \dots \lambda x_n)$

3) Множеството $F^{(n+1)}_{[x]}$ на полиномите $f(x) \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ на x с коефициенти $a_i \in F$ и от степен $\leq n$ е линейно пространство относно операциите

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{I=0}^{n} b_I x^I = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$

$$\lambda \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) x^i$$

Линейното пространство на полиномите $F^{(n+1)}_{[x]}$ може да се отъждестви с линейното пространство F^{n+1} по правилото

$$F^{(n+1)}_{[x]} \ni \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \longmapsto (a_0, a_1 \dots a_n) \in F^{n+1}$$

Множеството $F_{[x]}$ на всички полиноми на x с коефициенти от F е линейно пространство относно операциите

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{I=0}^{m} b_I x^I = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} a_i x^i + \sum_{I=0}^{\max(n,m)} b_I x^I$$

както в $F^{(n+m+1)}_{[x]}$

$\lambda \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) x^i$ както в $F^{(n+1)}_{[x]}$

Следствия от аксиоми за линейно пространство

Сл 1| Нулевият вектор на линейно пространство V е единствен

Доказателство

Ако $\vec{0}_1$ и $\vec{0}_2$ са нулеви вектори на V то

$$\vec{0}_1 = \vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2 \Rightarrow \vec{0} \text{ е единствен}$$

Сл 2/

Всеки вектор $u \in V$ има единствен противоположен $-u \in V$

Доказателство

Ако u_1 и u_2 са противоположни вектори на $u \in V$ то

$$u_1 + (u + u_2) = u_1 + \vec{0} = u_1$$
$$(u_1 + u) + u_2 = \vec{0} + u_2 = u_2$$

Сл 3/

Ако V е линейно пространство над F то

$$0u = \vec{0} \text{ за } 0 \in F, \forall u \in V \text{ и } \vec{0} \in V$$

Доказателство

Разгнежване

$$0u + u \overset{18}{=} 0u + 1u = (0+1)u = u$$

Прибавянето на противоположното на u от двете страни дава

$$0u = (0u + u) + (-u) = u + (-u) = \vec{0}$$

Сл 4/

$$\lambda\vec{0} = \vec{0} \text{ за } \forall \lambda \in F \text{ и } \vec{0} \in V$$

Доказателство

Знаем че $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$, полагаме $0 = \mu \in F$

$$(\lambda 0)u = \lambda(0u) \overset{сл3}{=} \lambda\vec{0}$$